<u>Přijímací zkouška pro NMgr. studium</u>

<u>FYZIKA 2017</u>

Datum: **Přidělené číslo:**

Počet získaných bodů:

Pište na orazítkované papíry, na každém uveďte své přidělené číslo. (Nepodepisujte se jménem.)

Maximální počet bodů celkem je 100, jejich rozdělení pro jednotlivé úlohy najdete v zadání. Celková doba na vypracování testu je 60 minut. Finální výsledky zřetelně vyznačte rámečkem, u kterého bude napsáno číslo a písmeno příslušné části úlohy - kupříkladu 2 a), …

Ve všech příkladech považujte za zadané: gravitační zrychlení g, Boltzmannovu konstantu k_B, Avogadrovu konstantu N_A, rychlost světla c, univerzální gravitační konstantu G, Planckovu konstantu h, Stefan-Boltzmannovu konstantu σ, konstantu b z Wiennova posunovacího zákona, dynamickou viskozitu vzduchu μ. Tyto symboly se tedy mohou vyskytnout ve výsledcích spolu s ostatními, které jsou prezentovány jako součást zadání v jednotlivých úlohách. Je potřeba zkontrolovat, zda Vaše finální řešení neobsahuje i symboly jiných veličin, které jste si možná zavedli v rámci pomocných průběžných výpočtů. Jestliže ano, je potřeba všechno ještě vyjádřit pomocí zadaných veličin.

<u>Jediné úlohy, u kterých je kromě odvození požadovaného vzorce třeba provést také numerický výpočet, jsou: [1]a), [1]b), [2]e), [3]d), [4]d)</u>

Planckovu konstantu, gravitační konstantu a rychlost světla v nich můžete zaokrouhlit následovně:

h= 6,6 x 10^{-34} Js

G=6,7 x 10^{-11} $m^3kg^{-1}s^{-2}$

c= 3 x 10^{8} ms^{-1}

Úloha [1] (35 bodů)

Planeta hmotnosti m_P obíhá kolem hvězdy hmotnosti M_H po kruhové orbitě o poloměru r.

($M_H \gg m_P$.)

a) Jak velikou silou F_{HP} působí hvězda na planetu? Jaké zrychlení a_P bude uděleno planetě?

(Tuto úlohu řešte obecně, číselně pak pro hodnoty m_P = 6 x10^{24} kg, M_H = 2x10^{30}kg , r= 1,5 x10^8 km.) [4body]

b) Jak velikou silou F_{PH} působí planeta na hvězdu? Jaké zrychlení a_H bude uděleno hvězdě?

(Tuto úlohu řešte obecně, číselně pak pro hodnoty m_P = 6 x10^{24} kg, M_H = 2x10^{30}kg , r= 1,5 x10^8 km.) [4body]

c) Jaká je vzdálenost x_T středu hvězdy a těžiště soustavy? [5bodů]

V přiblížení, kde hvězda je nehybná v počátku souřadné soustavy (těžiště je v jejím středu), vypočítejte pro planetu:

d) obvodovou rychlost v, úhlovou rychlost ω, periodu oběhu T a velikost momentu hybnosti L [17bodů]

e) Z předcházejících výpočtů najděte poměr T^2/r^3 a rozhodněte, jaký by byl pro případné ostatní planety soustavy (Všechny podstatně méně hmotné než centrální hvězda.) [5bodů]

Řešení:

a) Gravitační síla je v newtonovské mechanice dána jako $F_{HP} = G\frac{m_P M_H}{r^2}$, zrychlení určíme z Newtonova zákona síly $m_P a_P = G\frac{m_P M_H}{r^2} \rightarrow a_P = G\frac{M_H}{r^2}$

Číselně: $F_{HP} = 3{,}57 \times 10^{22}\,N$, $a_P = 5{,}96 \times 10^{-3} ms^{-2}$

b) Síla bude mít stejnou velikost jako v předchozím případě (bude ale opačně orientována, jak říká zákon akce a reakce), zrychlení bude ovšem jiné – vždyť tato síla působí na jiné těleso:

$F_{PH} = G\frac{m_P M_H}{r^2}$ $\qquad M_H a_H = G\frac{m_P M_H}{r^2} \rightarrow a_H = G\frac{m_P}{r^2}$

Číselně: $F_{PH} = 3{,}57 \times 10^{22}\,N$, $a_H = 1{,}5 \times 10^{-9} ms^{-2}$

c) Nastavíme-li souřadnicový systém tak, aby hvězda byla v počátku, a planeta ve vzdálenosti r na ose x, platí $x_H=0$, $x_P=r$, a souřadnice těžiště bude zároveň vzdáleností těžiště soustavy a středu hvězdy.

$$x_T = \frac{m_P x_P + M_H x_H}{m_P + M_H} = \frac{m_P\, r + M_H 0}{m_P + M_H} = \frac{m_P\, r}{m_P + M_H}$$

d) Gravitační síla tady působí jako dostředivá – použitím příslušného vztahu dostáváme v, a odtud pak ostatní veličiny.

$\frac{m_P v^2}{r} = G\frac{m_P\, M_H}{r^2} \;\rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_H}{r}}$ $\qquad \omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{GM_H}{r^3}}$ $\qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM_H}}$

$$L = rp\, sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = rm_P\ v = \ m_P\sqrt{G\ r\ M_H}$$

e) Z předcházejících výpočtů máme $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_H}$ - tenhle poměr nezávisí na žádných parametrech obíhajícího tělesa, a je tedy konstantní pro všechny planety soustavy, pohybující se po kruhových dráhách. Pro planety opisující eliptické dráhy by platil podobný vztah, kde by však místo poloměru vystupovala velká poloosa, tohle však už jde nad rámec naší úlohy.

Úloha [2] (20 bodů)

Slunce má hmotnost M_S, poloměr R_S, povrchovou teplotu $T_{S,}$ vzdálenost Země-Slunce je r_{ZS}, vzdálenost Mars-Slunce je r_{MS}, poloměr Země $R_{Z,}$ poloměr Marsu R_M.

a) Jaký je výkon Slunce P_S? (Energie vyzářená z celého povrchu za sekundu) [4body]

b) Označme I_Z energii, která dopadne v poledne za 1s na 1m^2 na zemském rovníku. Určete I_Z=? [3body]

c) Označme I_M energii, která dopadne v poledne za 1s na 1m^2 na rovníku Marsu. Určete I_M=? [3body]

d) Na kterou vlnovou délku λ_m připadá maximum spektrální hustoty vyzařování Slunce? [3body]

e) Kolik (N=?) fotonů vlnové délky λ by mělo dohromady energii E?

(Tuto úlohu řešte obecně, číselně pak pro hodnoty λ=500 nm, E =1 J) [3body]

f) Jakému úbytku hmotnosti (ΔM_S=?) odpovídá energie vyzářená povrchem Slunce za určitý čas t, kdybychom mohli pokládat teplotu T_S za konstantní v celém tomhle období? [4body]

Řešení:
a) Použijeme Stefan-Boltzmannův zákon, podle kterého je plošná hustota výkonu dána jako σT_S^4, povrch Slunce má plochu $4\pi R_S^2$. Pro celkový výkon tedy máme

$$P_S \ = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$$

b) $I_Z = \frac{P_S}{4\pi r_{ZS}^2} = \frac{R_S^2}{r_{ZS}^2}\sigma T_S^4$

c) $I_M = \frac{P_S}{4\pi r_{MS}^2} = \frac{R_S^2}{r_{MS}^2}\sigma T_S^4$

d) Použijeme Wienův posunovací zákon: $\lambda_m = \frac{b}{T_S}$

e) Energie jednoho fotonu je $h\frac{c}{\lambda}$. Odtud: $E = N\ h\frac{c}{\lambda}\ \rightarrow\ N = \frac{E\lambda}{hc}$

Číselně: $N = 2{,}525\ \times\ 10^{14}$

f) Použijeme Einsteinův vztah pro hmotu a energii:

$$\Delta M_S c^2 = P_S\, t \quad \rightarrow\ \Delta M_S = \frac{4\pi R_S^2 \sigma T_S^4}{c^2}$$

Úloha [3] (20 bodů)

Představme si experiment podobný Millikanovu experimentu, určený ke zjištění elektrického náboje záporně nabité olejové kapky o poloměru *r*, hustoty *ρ*, padající mezi dvěma nad sebou umístěnými vodorovnými deskami, jejichž vzdálenost je *d*. V první části experimentu kapka padá v gravitačním poli (tíhové zrychlení *g* je dané) a zrychluje, dokud se odporová síla vzduchu $F_o = 6\pi\mu r v$ (kde *μ* je zadaná dynamická viskozita vzduchu, *r* poloměr kapky, *v* je velikost okamžité rychlosti) nevyrovná gravitační síle, potom kapka padá konstantní rychlostí v_1. V druhé části experimentu mezi deskami vytvoříme homogenní elektrické pole: je mezi nimi potenciálový rozdíl *V*, horní deska je kladná, dolní záporná. Kapku znova necháme padat, a zase bude zrychlovat, dokud se všechny působící síly nevyrovnají. Tentokrát označme konečnou ustálenou rychlost v_2.

a) Napište rovnici popisující vyrovnání působících sil v první části experimentu, před zapnutím vnějšího elektrického pole. Vyjádřete z rovnice „ustálenou“ rychlost v_1. [5bodů]

b) Napište rovnici popisující vyrovnání působících sil ve druhé části experimentu, kdy působí taky vnější elektrická síla. Velikost neznámého náboje kapky označte *Q* (její náboj je záporný, tedy -*Q*). Vyjádřete z rovnice „ustálenou“ rychlost v_2. [5bodů]

c) Vyjádřete velikost náboje kapky *Q* jako funkci rozdílu rychlostí v_1 a v_2. [5bodů]

d) Předpokládejme, že bychom chtěli měření *Q* vykonat jiným experimentem s využitím homogenního magnetického pole indukce *B*, přičemž kapka hustoty ρ a poloměru *r* by do magnetického pole vletěla ve směru kolmém na indukční čáry rychlostí o velikosti *v*. Vyjádřete náboj *Q* jako funkci zakřivení trajektorie pod vlivem magnetického pole (poloměr křivosti dráhy označme *R*). (Tuto úlohu řešte obecně aj číselně pro hodnoty *B* = 0,2 T, *ρ* = 930 kg.m^{-3}, *r* = 0,5 mm, *v* = 180 m.s^{-1}, *R* = 1,5 m) [5bodů]

Řešení:
a) V tomhle případě se mají vyrovnat jenom gravitační a odporová síla. Je třeba si dát pozor na vyjádření hmotnosti kapky pomocí zadaných veličin, tedy $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi\mu r v_1 \quad \rightarrow\ v_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g}{6\pi\mu r}$$

b) V tomhle případě se mají vyrovnat gravitační, elektrická a odporová síla. Elektrická síla působí na záporně nabitou kapku směrem vzhůru, tedy opačně než gravitační. Její velikost je součinem intenzity pole a náboje kapky, přičemž intenzitu dostáváme jako podíl $\frac{V}{d}$.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g \; - \; Q\frac{V}{d} = 6\pi\mu r v_1 \quad \rightarrow \; v_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \; Q\frac{V}{d}}{6\pi\mu r}$$

c) $v_1 - v_2 = \frac{Q\frac{V}{d}}{6\pi\mu r} \quad \rightarrow \quad Q = \; 6\pi\mu r \;\; (v_1 - v_2)\frac{d}{V}$

d) Použijeme vztah pro Lorentzovu sílu. Vektorový součin je v tomhle případě zjednodušen kolmostí rychlosti na indukční čáry. Magnetická síla působí jako dostředivá, proto máme

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{v^2}{R} = QvB \;\; \rightarrow \; Q = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 v\rho}{BR}$$

Číselně: $Q = 2{,}92 \; \times \; 10^{-4}\, C$

Úloha [4] (25 bodů)

V nádobě s posuvným pístem byl plyn hmotnosti *m*, na začátku pod tlakem p_1, o objemu V_1 a teplotě T_1. Abychom umožnili izotermické rozpínání plynu na konečný objem V_2, nádobu s plynem jsme dali do kontaktu s ohřívačem.

a) Jaká je molární hmotnost M_m plynu? [10bodů]

b) Jaký je konečný tlak p_2? [4bodů]

c) Nakreslete *p-V* diagram pro náš izotermický děj a na křivce *p(V)* vyznačte počáteční a koncový stav. Označíme plochu pod takto ohraničenou křivkou symbolem *A.* Jakou fyzikální veličinu představuje plocha *A*? [5bodů]

d) Vypočtěte plochu *A* (Tuto úlohu řešte obecně, číselně pak pro hodnoty p_1 = 300 kPa, V_1 = 0,4 m^3, T_1 = 300K, V_2 = 0,6 m^3) [6bodů]

Řešení:
a) Použijeme stavovou rovnici pro ideální plyn $pV = Nk_BT$, kde *N* je počet částic

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = Nk_B = nN_A\, k_B = \frac{m}{M_m}N_A\, k_B \;\; \rightarrow \; M_m = \frac{T_1}{p_1V_1}m\, N_A\, k_B$$

b) Máme izotermický děj, tedy konstantní teplotu; proto $p_1V_1 \; = p_2V_2 \quad \rightarrow \; p_2 = \frac{p_1V_1}{V_2}$

c) p-V diagram vyjadřuje závislost tlaku na objemu $p(V)$, která bude v tomhle případě zobrazena jako větev hyperboly:

$$pV = p_1 V_1 \ \rightarrow p(V) = \frac{p_1 V_1}{V}$$

Plocha pod křivkou představuje práci vykonanou plynem na úkor tepla dodaného ohřívačem.

d) $A = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV \ = p_1 V_1 \ \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \ p_1 V_1 \ \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

Číselně: A= $48{,}66 \ \times \ 10^3 \, J$