SROVNÁNÍ DVOU TYPŮ AKUSTICKÝCH ZÁŘIČŮ NULTÉHO ŘÁDU

K. Vokurka
Technická univerzita v Liberci, katedra fyziky, Hálkova 6, 461 17 Liberec
karel.vokurka@vslib.cz

Úvod

Akustický zářič nultého řádu je představován radiálně pulsující koulí [1]. Technickými prostředky lze kouli radiálně pulsující na zvukových a ultrazvukových frekvencích realizovat jen velmi obtížně. V přírodě se však vyskytuje obrovské množství zářičů nultého řádu v podobě radiálně kmitajících bublinek v kapalinách, např. při kavitaci [2]. Studium zářiče nultého řádu má proto velký praktický význam. Kromě toho však lze postup pro určení akustického vyzařování bublinky využít i při výuce akustiky, neboť na tomto poměrně jednoduchém problému lze demonstrovat celou řadu obecnějších zákonitostí, které by při teoretickém studiu zářiče nultého řádu realizovatelného technickými prostředky nebyly tak zřejmé.

Pohybová rovnice kmitů bublinky

Uvažujme kulovou bublinku (zářič) kmitající (radiálně pulsující) s malou amplitudou v nestlačitelné kapalině. Časově proměnný poloměr zářiče nechť je $R=R_e+\Delta R$, kde R_e je rovnovážný poloměr a ΔR označuje výchylku z rovnovážné polohy. Maximální poloměr zářiče pak je $R_M=R_e+\Delta R_M$, kde ΔR_M představuje amplituda radiálních kmitů zářiče.

Potenciální energie kapaliny v okolí zářiče o poloměru R je rovna $E_p=(4/3)\pi p_\infty R^3$. Zde p_∞ označuje statický tlak v kapalině. Změnu potenciální energie kapaliny při pohybu stěny zářiče můžeme proto psát ve tvaru

$$\Delta E_p = \frac{4}{3}\pi p_\infty \left(R_M^3 - R^3\right) \cong 3E_{pe}\left(\frac{\Delta R_M}{R_e} - \frac{\Delta R}{R_e}\right) \quad , \tag{1}$$

kde jsme potenciální energii kapaliny v rovnovážné poloze označili jako E_{pe} ($E_{pe}=(4/3)\pi p_\infty R_e^3$) a pro $\Delta R_M << R_e$ jsme zanedbali členy vyšších řádů.

Kinetickou energii kapaliny radiálně proudící v okolí zářiče stanovíme ze vztahu $E_k = \frac{1}{2}\int v^2 dm$. Rychlost částic v v bodě r v kapalině se stanoví pomocí rovnice kontinuity

$$v = R' \frac{R^2}{r^2} \quad , \tag{2}$$

kde R' označuje derivaci poloměru R podle času. Hmotnost elementu kapaliny je

$dm=\rho dV=\rho 4\pi r^2 dr$, ρ značí hustotu kapaliny a dV elementární objem. Pak

$$E_k = 2\pi\rho R'^2 R^3 \cong 2\pi\rho\left(\Delta R'\right)^2 R_e^3 = 3E_{pe}\frac{1}{2}\frac{\rho}{p_\infty}\left(\Delta R'\right)^2 \quad . \tag{3}$$

Vnitřní energii stlačovaného plynu v bublince lze stanovit ze vztahu $E_i = -\int PdV$. Za předpokladu adiabatické změny tlak plynu bude roven $P=p_\infty(R/R_e)^{-3\gamma}$ (γ je Poissonova konstanta) a pro objem elementu plynu lze psát $dV=4\pi R^2 dR$. Pro $\Delta R << R_e$ opět můžeme napsat přibližný vztah pro tlak plynu

$$P \cong p_\infty\left(1-3\gamma\frac{\Delta R}{R_e}\right) \quad , \tag{4}$$

takže změna vnitřní energie bude po dosazení do vztahu pro E_i a integraci od ΔR_M do ΔR přibližně rovna

$$\Delta E_i \cong 3E_{pe}\left\{\left(\frac{\Delta R_M}{R_e}-\frac{\Delta R}{R_e}\right)-\frac{3}{2}\gamma\left[\left(\frac{\Delta R_M}{R_e}\right)^2-\left(\frac{\Delta R}{R_e}\right)^2\right]\right\} \quad . \tag{5}$$

Zákon zachování energie pro kmitající zářič lze zapsat ve tvaru $\Delta E_p=E_k+\Delta E_i$, neboť vzhledem k předpokladu nestlačitelné kapaliny nedochází k vyzařování akustické energie ΔE_a. Po dosazení za ΔE_p, E_k a ΔE_i ze vztahů (1), (3) a (5) získáme po úpravě

$$\frac{1}{2}\frac{\rho}{p_\infty}\left(\Delta R'\right)^2 = \frac{3}{2}\gamma\left[\left(\frac{\Delta R_M}{R_e}\right)^2-\left(\frac{\Delta R}{R_e}\right)^2\right] \quad . \tag{6}$$

Derivací rovnice (6) podle času získáme pohybovou rovnici radiálně kmitající bublinky

$$\Delta R'' + 3\gamma\frac{1}{R_e^2}\frac{p_\infty}{\rho}\Delta R = 0 \quad . \tag{7}$$

Označme

$$\omega^2 = 3\gamma\frac{1}{R_e^2}\frac{p_\infty}{\rho} \quad , \tag{8}$$

kde ω má význam vlastního úhlového kmitočtu netlumených kmitů soustavy. Pohybová rovnice nabude obvyklý tvar pro netlumenou kmitavou soustavu $\Delta R''+\omega^2\Delta R=0$. Jejím řešením je harmonická funkce času

$$\Delta R = \Delta R_M\cos(\omega t) \quad . \tag{9}$$

Pro další úvahy zaveďme *komplexor výchylky* $\Delta\widehat{R} = \Delta R_M e^{j\omega t}$. *Komplexor rychlosti* kmitání povrchu zářiče pak je roven (zde a dále značí $V=R'$)

$$\widehat{V} = j\omega \Delta R_M e^{j\omega t} = \omega \Delta R_M e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t} \quad . \tag{10}$$

Vlnové pole

Předcházející rovnice jsme stanovili za předpokladu nestlačitelné kapaliny. Pro nalezení vlnového pole ovšem již musíme předpokládat kapalinu stlačitelnou. Aby výše odvozené vztahy neztratily platnost, lze si představit, že zářič vykonává buzené kmity na vlastním kmitočtu soustavy, přičemž vyzářená akustická energie je dodávána ze zdroje. Vlny vyzářené zářičem nalezneme s pomocí rychlostního potenciálu. *Komplexor rychlostního potenciálu* kulové postupné rozbíhavé harmonické vlny je roven [1]

$$\widehat{\psi} = \frac{\widehat{\psi}_1}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad , \tag{11}$$

kde $k=\omega/c$ je vlnové číslo, c fázová rychlost šíření vlnění v kapalině a fázor $\widehat{\psi}_1 = \psi_1 e^{j\varphi_1}$ odpovídá rychlostnímu potenciálu ve vzdálenosti r=1 m od středu zářiče.

Komplexor akustické rychlosti částic v okolí zářiče pak získáme derivací rovnice (11) podle r [1]

$$\widehat{v}_a(r) = \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial r} = -\frac{\widehat{\psi}_1}{r^2} e^{j(\omega t - kr)} - jk \frac{\widehat{\psi}_1}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad . \tag{12}$$

První člen tohoto výrazu představuje blízké pole $v_{a\,bl}$, druhý člen pak vzdálené pole $v_{a\,vzd}$. *Komplexor akustického tlaku* je roven [1]

$$\widehat{p}_a(r) = -\rho \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial t} = -j\rho\omega \frac{\widehat{\psi}_1}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad . \tag{13}$$

Akustickou rychlost u povrchu zářiče získáme ze vztahu (12), položíme-li $r=R$ a zanedbáme-li vzdálené pole

$$\widehat{v}_a(R) = \frac{\psi_1}{R^2} e^{j(\varphi_1 + \pi - kR)} e^{j\omega t} \quad . \tag{14}$$

U povrchu zářiče musí platit $\widehat{v}_a(R) = \widehat{V}$. Porovnáním vztahů (10) a (14) proto získáme

$$\psi_1 = \omega \Delta R_M R^2 \quad , \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} + kR \quad . \tag{15}$$

Takto nalezený fázor $\widehat{\psi}_1$ můžeme dosadit do vztahů (12) a (13) a obdržíme

$$\widehat{v}_{a\,bl}(r) = \frac{\omega \Delta R_M R^2}{r^2} e^{j\left(\frac{\pi}{2} + kR\right)} e^{j(\omega t - kr)} \quad , \tag{16}$$

$$\widehat{v}_{a\,vzd}(r) = \frac{\omega^2 \Delta R_M R^2}{rc} e^{j(-\pi + kR)} e^{j(\omega t - kr)} \quad , \tag{17}$$

$$\widehat{p}_a(r) = \frac{\rho\omega^2 \Delta R_M R^2}{r} e^{j(-\pi + kR)} e^{j(\omega t - kr)} \quad . \tag{18}$$

U povrchu zářiče (r=R) z rovnice (18) získáme

$$p_a(R) = -\rho\omega^2 R \, \Delta R_M \cos(\omega t) \quad . \tag{19}$$

Akustickou energii ΔE_a vyzářenou během pohybu stěny zářiče z maximálního do minimálního poloměru stanovíme následovně. Špičková hodnota akustického tlaku p_{ap} je podle rovnice (18) v bodě $r>>R$ přibližně rovna

$$p_{ap} \cong \frac{\rho\omega^2 \Delta R_M R_e^2}{r} \quad . \tag{20}$$

Intenzitu zvuku I v okolí zářiče lze pak stanovit ze vztahu $I=p_{ap}^2/(2\rho c)$ [3]. Akustický výkon P_A přenášený vlněním, které prochází kulovou plochou o poloměru r je roven $P_A=I4\pi r^2$, takže hledaná akustická energie je rovna $\Delta E_a=P_A/(2f)=I2\pi r^2/f$, kde f je vlastní frekvence zářiče. Po dosazení za p_{ap} z rovnice (20) získáme

$$\Delta E_a \cong 3E_{pe} \frac{\pi\rho\omega^3 \Delta R_M^2 R_e}{2 p_\infty c} \quad . \tag{21}$$

Všimněme si nyní fyzikálního významu blízkého pole. V rovnici kontinuity (5) za R' dosaďme amplitudu rychlosti kmitání povrchu zářiče, tj. položme $R'=\omega\Delta R_M$. Po úpravě získáme $v=\omega\Delta R_M R^2/r^2$, což je stejný výraz jako pro amplitudu blízkého pole $v_{a\,bl}$ (výraz (16)). Odtud vyplývá, že blízké pole souvisí s kinetickou energií kapaliny, kterou částice získaly přeměnou ΔE_p během smršťování zářiče a která se opět přemění na ΔE_p při rozpínání zářiče. Tato mechanická energie zůstává v okolí zářiče a nešíří se s vlněním do okolí.

Číselný příklad

Uvažujme zářič o rovnovážném poloměru R_e=1 mm, kmitající s poměrnou amplitudou $\Delta R/R_e$=0,01 v kapalině hustoty ρ=10^3 kg.m^{-3} při statickém tlaku p_∞=10^5 Pa a nechť Poissonova konstanta plynu v bublince je γ=1,4. Dosazením do vztahu (8) získáme vlastní kmitočet soustavy f=3,26 kHz a zjistíme, že pro rychlost šíření zvuku v kapalině rovnu c=1450 m.s^{-1} je vlnová dálka vyzařované vlny λ=0,44 m. Z rovnice (20) dále získáme pro r=0,1 m špičkovou hodnotu akustického tlaku p_{ap}=42 Pa.

Maximální změna potenciální energie ΔE_{pmax} a vnitřní energie ΔE_{imax} odpovídá pohybu stěny zářiče mezi $R_e+\Delta R_M$ a $R_e-\Delta R_M$. Z výrazu (1) proto máme $\Delta E_{pmax}=3E_{pe}2\Delta R_M/R_e$ a z výrazu (5) $\Delta E_{imax}=3E_{pe}2\Delta R_M/R_e$. Kapalina má maximální kinetickou energii E_{kmax} při průchodu stěny rovnovážnou polohou, tj. pro ΔR=0. Dosadíme=li tuto podmínku do výrazu (6) a získaný výsledek dále do vztahu (3), získáme $E_{kmax}=3E_{pe}(3/2)\gamma(\Delta R_M/R_e)^2$. Porovnáním těchto vztahů vidíme, že $\Delta E_{pmax}/E_{kmax}=\Delta E_{imax}/E_{kmax}=4/(3\gamma\Delta R_M/R_e)$. Po dosazení číselných hodnot zjistíme, že změna potenciální a vnitřní energie je přibližně stokrát větší než maximální kinetická energie. Jinými slovy lze říci, že hlavní část potenciální energie (~99 %) se přeměňuje během kmitání přímo na vnitřní energii a jen přibližně 1 % na kinetickou energii. Podobný nepoměr platí i pro přeměnu na akustickou energii odnášenou vyzářenou vlnou, kde s použitím vztahu (21) snadno ověříme, že ΔE_a představuje pouze ~0,2 % z ΔE_{pmax}. Potenciální, vnitřní a kinetická energie se ovšem navzájem periodicky přeměňují, představují proto pro zdroj "jalové" zatížení, pouze akustická energie reprezentuje "činné" zatížení pro napájení měniče.

Závěr

V příspěvku je studováno chování akustického zářiče nultého řádu, přičemž příslušné vztahy byly odvozeny pro případ, kdy je zářič realizován radiálně kmitající bublinkou v kapalině. Je ovšem zřejmé, že úplně stejné vztahy (s výjimkou výrazu pro vnitřní energii plynu v bublince) budou platit i pro zářič, který pracuje na jiném principu. Pomineme-li technické potíže při realizaci takovéhoto zářiče, bude jistě obtížné naleznout pro tento zářič i vhodný výraz pro vnitřní energii a tudíž naleznout energetickou bilanci a související vztahy. Avšak závěry, které jsme získali v případě bublinky, např. týkající se vztahu jednotlivých energii, budou platit i nyní. Pouze číselné hodnoty se budou lišit.

Výzkum akustického chování bublinek má význam např. pro porozumění kavitačnímu šumu a tudíž i pro diagnostiku kavitace [5]. Zde uváděné výsledky jsou však rovněž využitelné při výuce akustiky, neboť jejich nalezení není matematicky náročné a získané poznatky umožňují lepé porozumět fyzikálnímu významu pojmů jako je např. blízké a vzdálené pole. Poznamenejme, že v akustické literatuře (viz např. [1, 3, 4]) se zde použitý názorný výklad založený na jednotlivých energiích a jejich vzájemném vztahu bohužel nepoužívá.

Poděkování

Výsledky obsažené v příspěvku byly získány při práci na výzkumném záměru MŠMT ČR: J11/98:245100304

Literatura

[1] Merhaut J.: *Teoretické základy elektroakustiky*. Praha, Academia 1971
[2] Leighton T. G.: *The Acoustic Bubble*. London, Academic Press 1994
[3] Skudrzyk E.: *The Foundations of Acoustics*. New York, Springer 1971
[4] Škvor Z.: *Akustika a elektroakustika*. Praha, Academia 2001
[5] Brdička M., Samek L., Taraba O.: *Kavitace – diagnostika a technické využití*. Praha, SNTL 1981